Ёлкин Сергей Владимирович
к.ф.-м.н, старший научный сотрудник Института Прикладной Математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва.

Применение у-чисел и их интерпретация[1]

Введение

Исторически достаточно долго считалось, что полезными для приложений и богатыми по содержанию являются только математические объекты, обладающие свойствами коммутативности и ассоциативности. Однако, после открытия Гамильтоном гиперкомплексных чисел взгляд математиков на некоммутативные объекты в корне изменился. Стали активно изучаться различные гиперкомплексные системы. При этом объекты, обладающие неассоциативностью по-прежнему оставались в тени. Традиционно считается, что эти объекты сложны для изучения и обладают скудным набором полезных свойств, которые могли бы определить их применение к реальным физическим объектам и процессам. Тем не менее, постепенно накопились результаты исследований о различных неассоциативных алгебрах и гиперкомплексных системах: октавах Кэли, алгебрах Йордана и др.

В 1993 г. были открыты неассоциативные и некоммутативные объекты, обладающие рядом интересных свойств. Поскольку они обладали тем достоинством, что каждый следующий объект можно было строить из предыдущего добавлением одного из двух базовых элементов, то эти объекты были названы числами – у-числами. Несмотря на то, что эти числа являются неассоциативными и некоммутативными, для них был получен набор степенных формул и выражений, в том числе для дробных и отрицательных степеней, исследована делимость [2,3], введено соотношение эквивалентности, построены алгебры. Свойство сведения старших степеней у-чисел к младшим позволило достаточно просто определить на множестве у-чисел функции представимые в виде степенных рядов. В частности были рассмотрены экспоненциальная, логарифмическая и биномиальная функции, показано, что эти функции представимы линейной комбинацией трёх самых простых у-чисел.

До сих пор не удавалось математически описать диалектическую логику. Даже сами попытки такого рода часто вызывали неодобрение философов. То что делалось в этом направлении, как правило, было связано с построением формальных логик (получивших название философские логики) в которых отбрасывался или видоизменялся какой либо из законов формальной логики. В целом же построить систему, основанную на отрицании всех трёх законов не удалось ни кому. В результате сложилось общее мнение, что эта задача в принципе неразрешима. Здесь мы представляем попытку подойти к проблеме с другой стороны – со стороны алгебры. Однако, мы не претендуем на всеобъемлющее решение проблемы, наша цель лишь показать возможности одной из алгебр, открытых недавно, для моделирования диалектических процессов: отрицания, отрицания отрицания, синтеза.

Итак, начнем со свойств у-чисел.

Свойства у-чисел и интерпретация

Практика работы с у-числами показала, что их можно успешно интерпретировать как элементарные семантические единицы – семы, а их комбинации как понятия и категории.
В основу аксиоматики у-чисел положено простое отношение:

$$\begin{aligned} y * y &= \bar{y}, \\ \bar{y} * \bar{y} &= y. \end{aligned} \tag{1}$$

Этот тип умножения (звёздочка) в дальнейшем будем называть инверсным.

Это отношение можно проиллюстрировать простой диаграммой - рис.1.

---
[1] Работа поддержана грантом РФФИ 06-01-00538-а

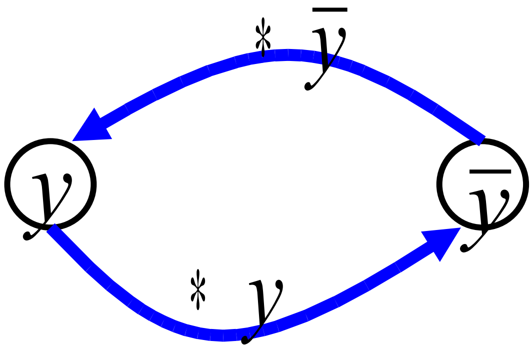

Рис.1

Умножение чисел и представленные диаграммой взаимные переходы у-чисел с очевидностью можно интерпретировать как отношение диалектических противоположностей. Именно результат самодействия (или как принято в математике говорить самоприменимость) является причиной перехода одного числа в другое. Точно также переходят друг в друга бытие и ничто у Гегеля: «Бытие, чистое бытие – без всякого дальнейшего определения. В своей неопределенной непосредственности оно равно лишь самому себе, а также не равно в отношении иного, не имеет никакого различия ни внутри себя, ни по отношению к внешнему. Если бы в бытии и было какое-либо различимое определение или содержание или же оно благодаря этому было бы положено как отличное от некоего иного, то оно не сохранило бы свою чистоту. Бытие есть чистая неопределённость и пустота. – в нем нечего созерцать, если может идти речь о созерцании, иначе говоря, оно есть только само это чистое, пустое созерцание. В нем также нет ничего такого, что можно было бы мыслить, иначе говоря, оно равным образом лишь это пустое мышление. Бытие, неопределённое непосредственное, есть на деле ничто и не более и не менее, как ничто.

Ничто, чистое ничто; оно простое равенство с самим собой, совершенная пустота, отсутствие определений и содержания; неразличенность в самом себе. …. Ничто есть, стало быть то же определение или, вернее, тоже отсутствие определений и, значит, вообще то же, что чистое бытие. [1]»

Формальная диаграмма описывает процесс их взаимного перехода: «Их истина есть, следовательно, это движение непосредственного исчезновения одного в другом: становление; такое движение, в котором они оба различны, но благодаря такому различию, которое столь же непосредственно растворилась. [1]»

Сами у-числа были открыты в процессе философского анализа спонтанного нарушения симметрии и его связи с диалектическим аспектом процесса мышления. Поэтому исходно операция инверсного умножения интерпретировалась как акт перехода к противоположному понятию в ходе развития некоторого противоречия. Другая операция – прямого умножения – соответствует тождеству (сохранению объекта), что можно интерпретировать как первый закон формальной логики – закон тождества:

$$y \circ y = y, \qquad \overline{y} \circ \overline{y} = \overline{y}. \tag{2}$$

Соответствующая этому диаграмма приведена на рис.2. Таким образом, система у-чисел содержит две противоположные операции умножения.

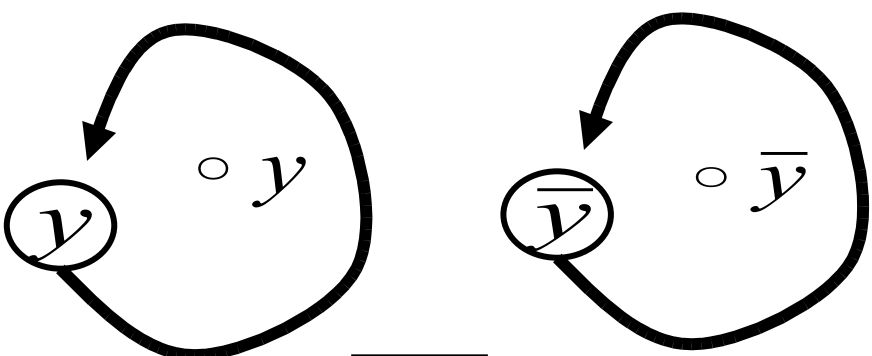

Рис.2

Операция прямого умножения введена в работе [2] . Как и определённая выше операция инверсного умножения, она обладает возможностью к образованию новых, более сложных y-чисел. Невозможно сделать утверждение о коммутативности или некоммутативности прямого умножения, однако в противоположность инверсному умножению это умножение ассоциативно.

В сочетании инверсное и прямое умножение порождают большое разнообразие структур. Логическая связь этих двух операций была раскрыта в работе [3]. Эти две операции также взаимно противоположны друг другу, как и y *и* y. И для них соответственно можно записать этот замечательный факт:

$$\begin{aligned} \circ\ \circ &= *, \\ *\ * &= \circ. \end{aligned} \tag{3}$$

Операция прямого умножения является алгебраическим аналогом закона тождества в формальной логике. Она отвечает за формальное конструирование понятий в семантическом языке, производимое без существенного изменения смысла соединяемых понятий.

Что касается произведений $y * y$ и $y * y$, то мы будем считать их новыми элементами, построенными на “образующих” элементах y и y. Мы будем считать эти два новых элемента различными, тем самым, рассматривая общий случай некоммутативной бинарной операции инверсного умножения. В результате мы имеем четыре элемента y, y, $y * y$ и $y * y$. Дальнейшее конструирование новых элементов потребует образования конструкций включающих в себя две и более операции инверсного умножения. Для корректного определения этих элементов потребуется исследовать ассоциативность инверсного умножения. Для этого рассмотрим следующий пример -- произведение трех элементов y:

$$(y * y) * y = y * y \tag{4}$$

$$y * (y * y) = y * y \tag{5}$$

Поскольку мы условились считать элементы $y * y$ и $y * y$ разными, то этот простейший пример показывает неассоциативность операции инверсного умножения. Отсутствие ассоциативности требует определенных правил, определяющих порядок выполнения операций инверсного умножения в произведениях включающих в себя более двух образующих элементов. Сформулируем эти правила. Прежде всего, определим инверсное умножение элементов $Y_2 \equiv y * y$ и $\overline{Y}_2 \equiv y * y$ на образующие элементы y и y. Для этого необходимо рассмотреть следующие произведения

$$y * Y_2,\ y * \overline{Y}_2,\ y * Y_2,\ y * \overline{Y}_2,\ Y_2 * y,\ \overline{Y}_2 * y,\ Y_2 * y,\ \overline{Y}_2 * y. \tag{6}$$

Запишем первое из произведений (5) в явном виде:

$$y * y * y. \tag{7}$$

В выражении (7) и во всех других будем считать, что порядок выполнения умножений – последовательный слева направо, при этом встречающиеся рядом два элемента y должны заменяться на y. Соответственно встречающиеся рядом в произведении два элемента y заменяются на y. Это означает, например, что в (7) сначала мы перемножаем элементы $y * y$, получая при этом y, а затем уже переходим к умножению $y * y$. В результате находим $y * y * y = y$. Подобным образом определяются и инверсные произведения вида

$$\overline{Y}_2 * y = y * y * y. \qquad (8)$$

Проходя слева направо в (8) мы заменяем пару $y * y$ на y, а затем в полученном выражении $y * y$ выполняем последнее умножение, получая y. Заметим, что кроме y и y среди элементов (6) возникают элементы “третьего” порядка $Y_3 \equiv y * y * y$ и $\overline{Y}_3 \equiv y * y * y$. При перемножении элементов “третьего” порядка и образующих элементов правила перемножения требуют одного важного уточнения: после инверсного перемножения первой встреченной пары одинаковых образующих элементов мы должны вернуться к началу получающегося выражения и снова идти слева направо до первой пары одинаковых образующих элементов, затем перемножаем их, снова возвращаемся к началу получающегося выражения и так далее. В результате мы получаем выражение представляющее собой цепочку чередующихся y и y. Таким образом, мы определили произведения Y_n и $\overline{Y}_n$ для любого порядка n. В результате получено множество элементов вида $Y_1 \equiv y$, $\overline{Y}_1 \equiv y$, $Y_2 \equiv y * y$, $\overline{Y}_2 \equiv y * y$, $Y_3 \equiv y * y * y$, $\overline{Y}_3 \equiv y * y * y$, … . Все эти элементы представляющие собой цепочки чередующихся образующих элементов y и y мы будем называть исходными элементами. Отметим, что указанное выше замечание, позволяет однозначно определить произведения элементов любого порядка между собой. В результате такие инверсные умножения приводят к элементам того или иного порядка.

Таким образом, сформулировав правила инверсного умножения, мы одновременно определили множество, на котором задана эта операция. В дальнейшем элементы этого множества вместе с введенной операцией инверсного умножения будем называть алгеброй y - чисел, а его элементы y - числами.

Умножение оператора на самого себя: $y * y$ или $y * y$ соответствует самодействию понятия (или самоприменимости), а результат умножения интерпретируется как появление противоположного по смыслу понятия. Наличие в составе множества двух противоположных элементов соответствует возникновению внешнего противоречия как отношения. Цепочка любых чисел, например, (ў*у)*(у*ў)*(ў*у)*(у*ў)*(ў*у)*(у*ў) … соответствует структуре и одновременно переходу между понятиями и может быть сколь угодно длинной. Это отражает тот факт, что противоречие не обязательно разрешается после первого противопоставления. Однако, циклы перехода противоположных понятий друг в друга, в конце концов, завершаются синтезом нового понятия.

Обособлением составных у-чисел будем называть операцию взятия скобок от произвольного у-числа. После обособления число вновь может быть умножено инверсно само на себя, например:

$$(Y_m) * (Y_m) = (Y_m). \qquad (9)$$

Операция обособления - аналог процедуры синтеза. Она позволяет любое составное у-число превращать снова в у-число нулевого порядка. То есть после обособления с у-числом можно обращаться так же как y_o-числом. Эта операция (обособления – синтеза), несмотря на внешнюю простоту весьма нетривиальна, ибо одновременно содержит в себе две процедуры: синтез и «снятие понятий». Она дает возможность строить иерархию понятий начиная с любого понятия принятого по соглашению за «начало». Приведём на рис.3 диаграммы для обособленных чисел.

$$(\hat{y} — y) \qquad\qquad (\hat{y} — y)$$

$$(\hat{y}_{*}y) \qquad\qquad (\hat{y}_{\circ}y)$$

Рис.3

Число $(y * y)$ интерпретируется как процесс уничтожения: переход от бытия к ничто. И наоборот число $(y * y)$ интерпретируется как процесс рождения: переход от ничто к бытию. Полная интерпретация получающихся обособленных чисел дана в работе о семантическом языке SL [5].

Самоподобие у-чисел

Обратим внимание читателя на фрактальный характер образующихся в семантическом языке SL понятий. Так на рис. 4 изображена диаграмма в виде фрактала соответствующая понятию пространства-времени.

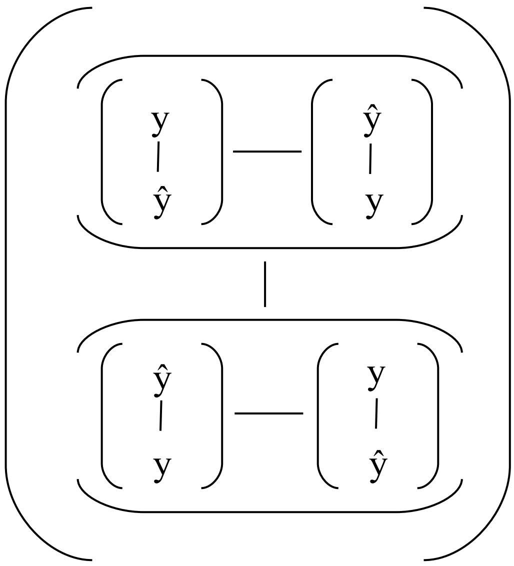

Рис.4

В качестве фрактала можно также представить иерархию у-чисел, возникающую в результате умножения уже имеющегося набора на ещё одно у-число. См. рис.5.

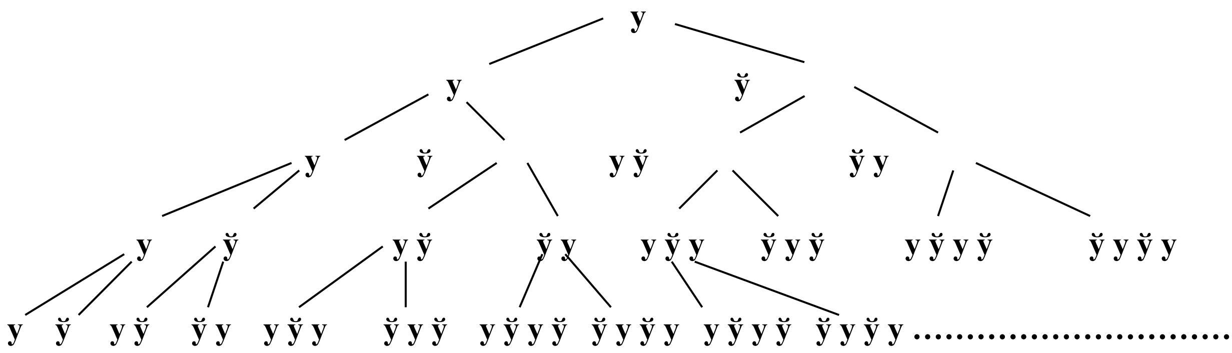

Рис. 5

Хорошо видно, что это бинарное дерево самоподобно, если за корень дерева брать любое **у** по левой ветви.

Расширение множества у-чисел

Расширим множество y- чисел. Во-первых, определим умножение y- чисел на вещественное или комплексное число α. Будем обозначать новый элемент αY. Подчиним эту операцию аксиомам коммутативности и ассоциативности, то есть будем полагать:

$$\alpha Y = Y\alpha \quad , \tag{10}$$

$$(\alpha\beta)Y = \alpha(\beta Y) \quad , \tag{11}$$

где под Y подразумевается какое-либо из исходных y- чисел. Элементы такого вида будем относить к множеству обобщенных y- чисел. Кроме того, после определения операции умножения y- числа на вещественное или комплексное число естественно пополнить получающееся множество нулевым элементом Θ, к которому по определению приводит умножение любого y- числа на ноль:

$$0Y = \Theta \quad , \qquad\qquad 0\alpha Y = \Theta \quad . \tag{12}$$

$$\alpha\Theta = \Theta \tag{13}$$

Во-вторых, определим на множестве исходных y- чисел, умноженных на вещественное или комплексное число бинарную операцию, которую будем именовать сложением y- чисел. Будем считать, что для этой операции выполнены аксиомы коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности. Определенная таким образом операция сложения является совершенно аналогичной соответствующей операции сложения для вещественных или комплексных чисел:

$$Y^{(1)} + Y^{(2)} = Y^{(2)} + Y^{(1)} \ , \tag{14}$$

$$Y^{(1)} + \left(Y^{(2)} + Y^{(3)}\right) = \left(Y^{(1)} + Y^{(2)}\right) + Y^{(3)} \ , \tag{15}$$

$$(\alpha + \beta)Y = \alpha Y + \beta Y \ , \tag{16}$$

$$\alpha\left(Y^{(1)} + Y^{(2)}\right) = \alpha Y^{(1)} + \alpha Y^{(2)} \ , \tag{17}$$

$$\Theta + Y = Y \ , \tag{18}$$

где под обозначениями Y , $Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$, $Y^{(3)}$ подразумеваются исходные y- числа, либо исходные y- числа помноженные на вещественное или комплексное число. Получаемые в результате операции сложения элементы будем называть обобщенными y- числами. Они являются расширением множества исходных y- чисел. В силу аксиом, наложенных на операцию сложения ее можно определить и для обобщенных y- чисел. В результате в множестве обобщенных y- чисел справедливы аксиомы (12)-(18).

Умножение вещественных и комплексных чисел на у-числа может быть использовано в задачах на собственные функции и собственные значения. Для иллюстрации рассмотрим один простой пример. Пусть, например, на столе находятся цветы в вазе, колода игральных карт, карандаш, лужица воды из вазы с цветами. Требуется сосчитать предметы. Если мы считаем абстрактно однородные предметы, то счёт не вызывает проблем. Но в данном случае необходимо выяснить, что считать - однородные предметы или разнородные. Являются ли цветы и ваза одним предметом или разными, нужно ли считать карты поштучно или за единицу принять всю колоду, принадлежит ли вода на столе к той, что в вазе или это самостоятельный объект. Эта простая на первый взгляд задача требует различных мыслительных действий. Математически её и другие подобного рода задачи можно свести к известной задаче на собственные функции и собственные значения.

$$\hat{L} f(Y) = l_n f_n(Y). \tag{19}$$

Слева в уравнении стоит оператор количества $\hat{L}$ и некоторая функция от у-числа, справа количество предметов l_n сорта n и соответствующая этим предметам собственная (сортовая) функция. Природа оператора $\hat{L}$ такова, что он считает не все предметы (уравнение имеет решение не для любых у-чисел), а только те которые объединены некоторым признаком. В результате решения этого уравнения получается спектр собственных функций и собственных значений.

Операция сложения соответствует операции следования словам в предложении. На физическом языке это означает, что имеет место **принцип суперпозиции**, когда некоторый смысл может быть представлен в виде суммы смыслов или, иначе, разложен по набору собственных функций (смыслов) задачи.

В отличие от физических задач, в которых собственные значения должны быть вещественными, задачи содержащие у-числа возможно могут иметь комплексные собственные значения, так как требование физической наблюдаемости величин здесь не является обязательным.

От у-чисел можно строить различные функции представляемые в виде рядов. Приведём в качестве примера экспоненциальные функции от у-чисел, полученные в работе [6]:

$$e_*^{\alpha y} = a(\alpha) y + b(\alpha) y + c(\alpha) y * y \tag{20}$$

где

$$a(\alpha) = \frac{1}{3}\left[e^{\alpha} - 2e^{-\alpha/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\right] \tag{21}$$

$$b(\alpha) = \frac{1}{3}\left[e^{\alpha} - 2e^{-\alpha/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha - \frac{\pi}{3}\right)\right] \tag{22}$$

$$c(\alpha) = \frac{1}{3}\left[e^{\alpha} + 2e^{-\alpha/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right)\right] \tag{23}$$

Аналогично определяется $e_*^{\alpha y}$:

$$e_*^{\alpha y} = a(\alpha) y + b(\alpha) y + c(\alpha) y * y \tag{24}$$

где $a(\alpha)$, $b(\alpha)$, $c(\alpha)$ определены (21)-(23).

Этот красивый результат ещё ждёт своего истолкования.

Моделирование противоречий

Рассмотрим динамику развития понятий и отношений в системе: учитель и ученик. Выберем исходный универсум, состоящий из этих двух понятий. Обычно считается, что некто может быть учителем в том случае, только если у него имеется хотя бы один ученик, и наоборот, некто является учеником только тогда, когда у него есть хотя бы один учитель. В процессе учебы не только ученик учится у учителя, но и учитель учится у своего ученика. И это происходит не только тогда, когда ученик, постигнув науку, наконец, превосходит своего учителя, становясь для него учителем, но и тогда, когда ученик ещё не превзошел своего учителя. Мало того, основываясь на реакциях ученика, учитель сам учится учить. Он становится учеником самого себя. Одновременно ученик учится учиться, становясь учителем самого себя. Наконец, ученик, достигнув уровня своего учителя, сам может вступать в отношение обучения с другими людьми, выступая в роли учителя. А учитель, научившись учить, может подняться на следующую ступень, став учителем учителей – методистом. Эту ситуацию можно описать как динамическую модель взаимодействия двух понятий:

1. Тождество. Учитель и ученик неразличимы, так как не вступили в отношение обучения.
2. Различие. Учитель и ученик вступили в отношение обучения.
3. Противоположность. Учитель не есть ученик. Ученик не есть учитель.
4. Противоречие. Учитель сам себе ученик. Ученик сам себе учитель.
5. Снятие противоречия, синтез новых понятий. Завершение обучения. Учитель и методист.

На первом этапе объем понятий пуст, так как неизвестно, кто в какой роли будет выступать. На втором и третьем этапах учитель и ученик делят объем универсума. На четвертом этапе объем каждого понятия одновременно равен нулю и объему всего универсума – противоречие. На пятом этапе:

1. Универсум разрушается, так как возникает новое понятие методист;
2. Объем понятий пуст, так как между бывшими учителем и учеником нет отношения «обучение».

Одновременно с тем как эволюционируют понятия и сами субъекты учитель и ученик, динамически меняется и само понятие «обучение». У этого отношения имеются две противоположные стороны: со стороны учителя (учить) и со стороны ученика (учиться). Из них синтезируется понятие самообучение.

Важной частью динамически понятий является операция синтеза. В пункте 5 нашего примера возникают новые понятия: методист и самообучение. При этом возникает и новое содержание понятий. Формально же это можно выразить так:

1. Соединение противоречивых понятий – ученик*учитель.
2. Снятие старого содержания и синтез нового (ученик*учитель)=методист, то есть учитель, посредством самообучения достигший уровня позволяющего учить других учителей.

С помощью у-чисел можно провести окончательную формализацию динамической модели понятий в системе учитель-ученик.

Пусть учитель это y, ученик- y, а обучение -*, тогда:

1. y, y – выбор универсума;
2. $A\{y, y, *\}$ – вступили в отношение обучения (здесь А –алгебра);
3. $y \neq y$ - противоположность понятий;
4. $y * y = y,$ – противоречие , «сам себе учитель» (самообучение)
   $y * y = y$ - «сам себе ученик»;
5. $Y = (y * y)$ – синтез понятия методист;
   $Y = (y * y)$ – новый учитель, бывший ученик.
6. $y * y$ - учиться, $y * y$ - учить.
7. $y * y * y$ - учитель учится у ученика, $y * y * y$ - ученик учится у учителя.
8. $y * y * y * y$ - учитель учится у *образа ученика*, находящегося в сознании учителя, $y * y * y * y$ - ученик учится у *образа учителя*, находящегося в сознании ученика.

Приведём ниже рисунок (рис.6) иллюстрирующий описанный пример.

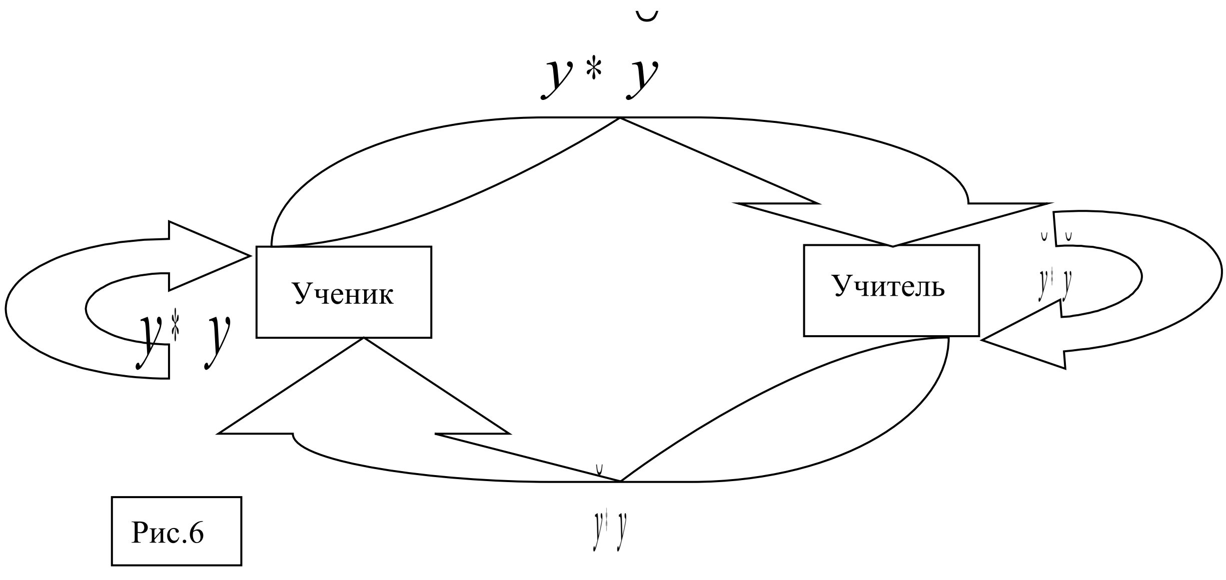

Рис.6

Все остальные у-числа, которые циклически будут образовываться из исходных будут производными от рассмотренных понятий. В принципе, можно как угодно глубоко рассматривать динамику понятий в приводимом примере.

Проанализируем в качестве примера известный парадокс: «это утверждение ложно».

Обычно рассуждают следующим образом. Раз это утверждение ложно, то значит оно и истинно. Следовательно, одно и тоже утверждение и истинно и ложно, а это парадокс, так как нарушается второй закон формальной логики. Существует множество вариантов этого парадокса, предложенных разными авторами и в разное время [7]. Предлагалось множество путей его решения. Однако, до сих пор этот парадокс считается неразрешимым.

Следуя логике у-чисел этот парадокс легко разрешается. Для этого нужно всего лишь построить утверждение являющееся тем самым отрицанием исходного утверждения, которого оно требует: «это утверждение истинно». Таким образом, мы переходим от формальной логики к диалектической. А именно, теперь с необходимостью следует, что из истинности утверждения «это утверждение истинно» следует его ложность (рис.7).

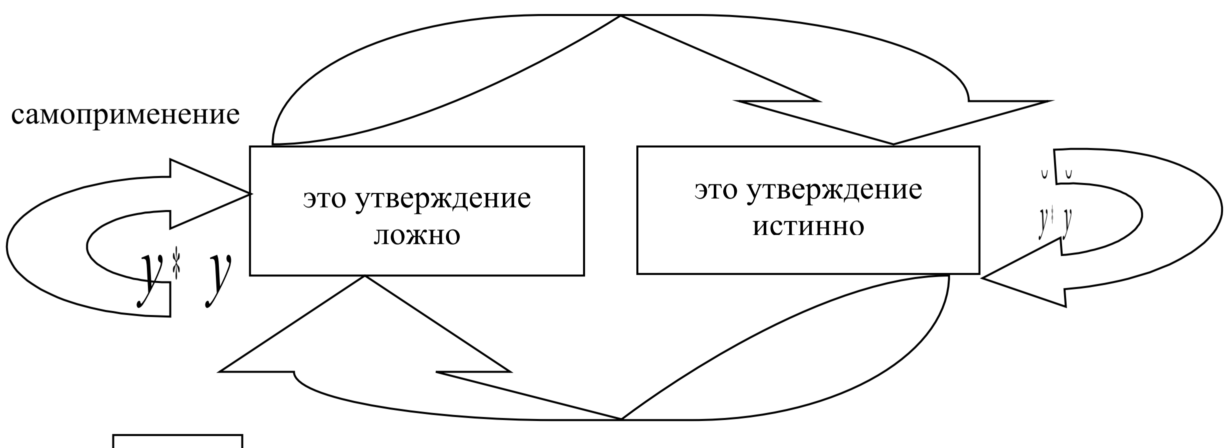

Рис.7

Фактически разрешение формально логического противоречия осуществляется за счёт разведения взаимно исключающих утверждений в понятийно-смысловом пространстве. Именно так поступают в ТРИЗ (теории решения изобретательских задач) разделяя противоречивые свойства по какому либо атрибуту: во времени, в пространстве, по фазовым состояниям, и т. д. .

Применение у-чисел в синергетике

Синергетика – наука о самоорганизации различных систем. Основным источником и причиной процессов самоорганизации является наличие нелинейности в среде или в отношениях между элементами системы. Как было показано выше, именно нелинейность и самоприменимость наиболее характерны для у-чисел, что позволяет надеяться на их применение в синергетике. Ряд свойств, которыми обладают у-числа, позволяет надеяться на их применение в синергетике. В частности, процессы самоорганизации описываются на алгебраическом уровне, что дает новый инструмент их исследования. У-числа обладают радом интересных, с точки зрения интерпретации, свойств. Например, увеличение длины числа при умножении его на противоположное тому которым заканчивается цепочка можно интерпретировать как усложнение структуры объектов и процессов в течение их истории, и следовательно, как накопление информации:

$$y * y * y * y \quad * \quad y \quad \Rightarrow \quad y * y * y * y * y \ ,$$

а коллапс у-числа как стирание (забывание) информации:

$$y * y * y * y \quad * \quad y \quad = \quad y$$

Операция взятия числа в скобки аналогична диалектическим процедурам снятия старых понятий и синтеза нового понятия.

Расширение у-чисел от двух исходных базовых элементов до трёх (или более) приводит к необходимости введения в структуру операций умножения меры вероятности, что в свою очередь приводит к вероятностной логике. Эти и некоторые другие свойства у-чисел позволяют моделировать не только формально-логические, но и диалектические свойства человеческого мышления.

Алгебра у-чисел нашла в настоящий момент свои первые приложения, в частности для разработки семантического языка SL [4,5]. Надеемся, дальнейшее изучение свойств у-чисел позволит построить для них интегральное и дифференциальное исчисление, а сами числа найдут своё место в философском анализе, синергетике, теории искусственного интеллекта и физических приложениях.

Список литературы

1.Гегель Г.Ф.В. Наука логики Санкт-Петербург «Наука» 2002 с.68-69

2. Ёлкин С.В., Алгебраический подход к концепции информонного поля // Куликов В.В., Гаврилов Д.А., Ёлкин С.В., Универсальный искусственный язык- “hООМ-Диал”. М. : Гэлэкси Нэйшн, 1994. С. 73-94.

3.Елкин С.В., К вопросу об информационной физике. Часть 1., -М.: ПАИМС, МГИФИ, 1997.

4. Ёлкин С.В. Ёлкин С.С. Информационное исчисление // Вестник ВИНИТИ НТИ. 2002. сер 2, N11. С17-24.

5. Ёлкин С.В. Открытый семантический язык SL // Вестник ВИНИТИ НТИ. 2003. сер 2, N4. С.5-15

6.Игашов С.Ю, Ёлкин С.В. Алгебра у-чисел: возможности в области построения функций и множеств // Препринт ИПМ N 60 за 2005г.

7. Ивин А.А. Логика 1998г.