Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

С.В. Ёлкин, С.Ю. Игашов

Алгебра у-чисел: возможности в области построения функций и множеств

Препринт №

Москва 2004

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ имени М.В. Келдыша

С.В. Ёлкин, С.Ю. Игашов

Алгебра у-чисел: возможности в области построения функций и множеств

Москва, 2004

С.В. Ёлкин, С.Ю. Игашов

Алгебра y-чисел: возможности в области построения функций и множеств

Аннотация

В данной работе представлено дальнейшее исследование неассоциативной алгебры y-чисел. Рассмотрены вопросы делимости, извлечения корней, построения функций и множеств.

S.V. Yolkin, S.Yu. Igashov

The algebra of y-numbers: opportunities in construction of functions and multitudes

Abstract

This paper is devoted to the further investigation on non-associative algebra of y-numbers. The problems of divisibility, finding roots and construction of functions and multitudes are considered.

Содержание

Содержание……………………………………………………………3
1. Введение…………………………………………………………….4
2. Алгебра у-чисел…………………………………………………….5
3. Расширение множества у-чисел……………………………………...7
4. Некоторые функции от у-чисел………………………………………8
5. Соотношение эквивалентности и разбиение на классы
эквивалентных элементов в множестве исходных у-чисел………………..11
6. Возведение исходных у-чисел в степень. Таблица
умножения исходных у-чисел……………………………………………13
7. Извлечение корней из исходных у-чисел…………………………...15
8. Операция деления исходных у-чисел……………………………….16
9. Обобщение понятия делимости……………………………………...18
10. Заключение………………………………………………………..18
Список литературы…………………………………………………...19

1. Введение

Исторически достаточно долго считалось, что полезными для приложений и богатыми по содержания являются только математические объекты, обладающие свойствами коммутативности и ассоциативности. Однако, после открытии Гамильтоном гиперкомплексных чисел взгляд математиков на некоммутативные объекты в корне изменился. Стали активно изучаться различные гиперкомплексные системы. При этом объекты, обладающие неассоциативностью по-прежнему оставались в тени. Традиционно считается, что эти объекты сложны для изучения и обладают скудным набором полезных свойств, которые могли бы определить их применение к реальным физическим объектам и процессам. Тем не менее, постепенно накопились результаты исследований о различных неассоциативных алгебрах и гиперкомплексных системах: октавах Кэли, алгебрах Йордана и др.

В 1993 г. были открыты неассоциативные и некоммутативные объекты, обладающие рядом интересных свойств. Поскольку они обладали тем достоинством, что каждый следующий объект можно было строить из предыдущего добавлением одного из двух базовых элементов, то эти объекты были названы числами – у-числами. Несмотря на то, что эти числа являются неассоциативными и некоммутативными, для них был получен набор степенных формул и выражений, в том числе для дробных и отрицательных степеней, исследована делимость [1].

В данной работе представлено дальнейшее исследование алгебры у-чисел, рассмотрены некоторые простые функции, задаваемые в виде степенного ряда.

Алгебра у-чисел нашла в настоящий момент свои первые приложения, в частности для разработки семантического языка SL [2,3]. Надеемся, дальнейшее изучение свойств у-чисел позволит построить интегральное и дифференциальное исчисление, а сами числа найдут своё место в физических приложениях.

2. АЛГЕБРА y-ЧИСЕЛ

Рассмотрим сначала два элемента y и y для которых определена бинарная операция – умножение “$*$” которое будем называть инверсным. При этом будем всегда предполагать выполненными следующие две аксиомы :

$$y * y = y \tag{1}$$

$$y * y = y . \tag{2}$$

Таким образом, мы определили операцию инверсного умножения при умножении элементов y и y на себя. Что касается произведений $y * y$ и $y * y$, то мы будем считать их новыми элементами, построенными на “образующих” элементах y и y. Мы будем считать эти два новых элемента различными, тем самым, рассматривая общий случай некоммутативной бинарной операции инверсного умножения. В результате мы имеем четыре элемента y, y, $y * y$ и $y * y$. Дальнейшее конструирование новых элементов потребует образования конструкций включающих в себя две и более операции инверсного умножения. Для корректного определения этих элементов потребуется исследовать ассоциативность инверсного умножения. Для этого рассмотрим следующий пример -- произведение трех элементов y :

$$(y * y) * y = y * y \qquad (3)$$

$$y * (y * y) = y * y \qquad (4)$$

Поскольку мы условились считать элементы $y * y$ и $y * y$ разными, то этот простейший пример показывает неассоциативность операции инверсного умножения. Отсутствие ассоциативности требует определенных правил, определяющих порядок выполнения операций инверсного умножения в произведениях включающих в себя более двух образующих элементов. Сформулируем эти правила. Прежде всего определим инверсное умножение элементов $Y_2 \equiv y * y$ и $\overline{Y}_2 \equiv y * y$ на образующие элементы y и y. Для этого необходимо рассмотреть следующие произведения

$$y * Y_2,\ y * \overline{Y}_2,\ y * Y_2,\ y * \overline{Y}_2,\ Y_2 * y, \overline{Y}_2 * y, Y_2 * y, \overline{Y}_2 * y. \qquad (5)$$

Запишем первое из произведений (5) в явном виде:

$$y * y * y. \qquad (6)$$

В выражении (6) и во всех других будем считать, что порядок выполнения умножений – последовательный слева направо, при этом встречающиеся рядом два элемента y должны заменяться на y. Соответственно встречающиеся рядом в произведении два элемента y заменяются на y. Это означает, например, что в (6) сначала мы перемножаем элементы $y * y$, получая при этом y, а затем уже переходим к умножению $y * y$. В результате находим $y * y * y = y$. Подобным образом определяются и инверсные произведения вида

$$\overline{Y}_2 * y = y * y * y. \qquad (7)$$

Проходя слева направо в (7) мы заменяем пару $y * y$ на y, а затем в полученном выражении $y * y$ выполняем последнее умножение, получая y. Заметим, что кроме y и y среди элементов (5) возникают элементы “третьего” порядка $Y_3 \equiv y * y * y$ и $\overline{Y}_3 \equiv y * y * y$. При перемножении элементов “третьего” порядка и образующих элементов правила перемножения требуют одного важного уточнения: после инверсного перемножения первой встреченной пары одинаковых образующих элементов нужно вернуться к началу получающегося выражения и снова идти слева направо до первой пары одинаковых образующих элементов, затем перемножаем их, снова возвращаемся к началу получающегося выражения и так далее. В результате получаем выражение представляющее собой цепочку чередующихся y и y. Таким образом, мы определили произведения Y_n и $\overline{Y}_n$ для любого порядка n (здесь необходимо отметить, что в этой работе, в отличие от предыдущей работы [2] использована несколько отличающаяся, более удобная нумерация y-чисел). Окончательно получено множество элементов вида $Y_1 \equiv y$, $\overline{Y}_1 \equiv y$, $Y_2 \equiv y * y$, $\overline{Y}_2 \equiv y * y$, $Y_3 \equiv y * y * y$, $\overline{Y}_3 \equiv y * y * y$, … . Все эти элементы представляющие собой цепочки чередующихся образующих элементов y и y будем называть исходными элементами. Отметим, что указанное выше замечание, позволяет однозначно определить произведения элементов любого порядка между собой. В результате такие инверсные умножения приводят к элементам того или иного порядка.

Приведем несколько поясняющих примеров умножения исходных элементов:

$$Y_3 * \overline{Y}_2 = y * y * y * y * y = Y_5 \tag{8а}$$

$$Y_3 * Y_2 = y * y * y * y * y = y * y * y * y = y * y * y = y * y = y \equiv Y_1 \tag{8б}$$

$$Y_2 * Y_3 = y * y * y * y * y \equiv Y_5 \tag{8в}$$

$$Y_3 * \overline{Y}_2 = y * y * y * y * y \equiv Y_5 \tag{8г}$$

$$\overline{Y}_3 * \overline{Y}_2 = y * y * y * y * y = y * y * y * y = y * y * y = y * y = y \equiv \overline{Y}_1 \tag{8д}$$

Таким образом, сформулировав правила инверсного умножения, мы одновременно определили множество, на котором задана эта операция. В дальнейшем элементы этого множества вместе с введенной операцией инверсного умножения будем называть алгеброй y- чисел, а его элементы y- числами. Операция умножения позволяет определить операцию возведения в целую степень. Для операции возведения в степень n будем в дальнейшем использовать обозначение $[Y]^n_*$. Здесь в обозначении символ $*$ означает возведение в степень по инверсному умножению. Рассмотрим соответствующие результаты для возведения в целочисленные степени образующих элементов -- y- чисел y и y: $[y]^n_* \equiv y * y * ... * y$. Положим по определению для $n = 1$

$$[y]^1_* = y\,. \tag{9}$$

Для степеней $n = 2$, 3 и 4 получаем:

$$[y]^2_* = y * y = \breve{y} \tag{10}$$

$$[y]^3_* = y * y * y = \breve{y} * y = \overline{Y}_2 \tag{11}$$

$$[y]^4_* = y * y * y * y = \breve{y} * y * y = \breve{y} * \breve{y} = y \tag{12}$$

Нетрудно заметить, что и более высокие степени сводятся к тем же результатам:

$$[y]^{3n+1}_* = y = Y_1 \tag{13}$$

$$[y]^{3n+2}_* = \breve{y} = \overline{Y}_1 \tag{14}$$

$$[y]^{3n+3}_* = \breve{y} * y = \overline{Y}_2 \tag{15}$$

Такое чередование результатов возведения в положительные целые степени позволяет взять за определение операции возведения в степень соотношения (13)-(15) и распространить их на отрицательные n. Тогда, в частности из (15) при $n = -1$ получаем:

$$[y]^0_* = \breve{y} * y = \overline{Y}_2 \tag{16}$$

При возведении в нулевую степень ненулевого вещественного числа мы получаем единицу. В алгебре y - чисел этому соответствует число $[y]_*^0 = \breve{y} * y$. Оно действительно являет собой левую единицу, но, например, для числа y: $[y]_*^0 * y = \breve{y} * y * y = y$. Очевидно, для y число $[y]_*^0$ уже не будет левой единицей: $[y]_*^0 * \breve{y} = \breve{y} * y * \breve{y} = \overline{Y}_3$.

Аналогичные результаты справедливы и для возведения в степень образующего элемента y:

$$[\breve{y}]_*^{3n+1} = \breve{y} = \overline{Y}_1 \tag{17}$$

$$[\breve{y}]_*^{3n+2} = y = Y_1 \tag{18}$$

$$[\breve{y}]_*^{3n+3} = y * \breve{y} = Y_2 \tag{19}$$

3. РАСШИРЕНИЕ МНОЖЕСТВА y-ЧИСЕЛ

Расширим множество y - чисел. Во-первых, определим умножение y - чисел на вещественное или комплексное число α. Будем обозначать новый элемент αY. Подчиним эту операцию аксиомам коммутативности и ассоциативности, то есть будем полагать:

$$\alpha Y = Y\alpha \quad , \tag{20}$$

$$(\alpha \beta) Y = \alpha (\beta Y) \quad , \tag{21}$$

где под Y подразумевается какое-либо из исходных y - чисел. Элементы такого вида будем относить к множеству обобщенных y - чисел. Кроме того, после определения операции умножения y - числа на вещественное или комплексное число естественно пополнить получающееся множество нулевым элементом Θ, к которому по определению приводит умножение любого y - числа на ноль:

$$0Y = \Theta \quad , \qquad\qquad 0\alpha Y = \Theta \quad . \tag{22}$$

$$\alpha \Theta = \Theta \tag{23}$$

Во-вторых, определим на множестве исходных y - чисел, умноженных на вещественное или комплексное число бинарную операцию, которую будем именовать сложением y - чисел. Будем считать, что для этой операции выполнены аксиомы коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности. Определенная таким образом операция сложения является совершенно аналогичной соответствующей операции сложения для вещественных или комплексных чисел:

$$Y^{(1)} + Y^{(2)} = Y^{(2)} + Y^{(1)} \quad , \tag{24}$$

$$Y^{(1)} + \left(Y^{(2)} + Y^{(3)}\right) = \left(Y^{(1)} + Y^{(2)}\right) + Y^{(3)} \quad , \tag{25}$$

$$(\alpha + \beta) Y = \alpha Y + \beta Y \quad , \tag{26}$$

$$\alpha\left(Y^{(1)} + Y^{(2)}\right) = \alpha\, Y^{(1)} + \alpha\, Y^{(2)} \ , \tag{27}$$

$$\Theta + Y = Y \ , \tag{28}$$

где под обозначениями Y , $Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$, $Y^{(3)}$ подразумеваются исходные y - числа, либо исходные y - числа помноженные на вещественное или комплексное число. Получаемые в результате операции сложения элементы будем называть обобщенными y - числами. Они являются расширением множества исходных y - чисел. В силу аксиом, наложенных на операцию сложения ее можно определить и для обобщенных y - чисел. В результате в множестве обобщенных y - чисел справедливы аксиомы (22)-(28).

4. НЕКОТОРЫЕ ФУНКЦИИ ОТ y-ЧИСЕЛ

Выше было найдено, что старшие степени образующих y - чисел сводятся всего лишь к трем y - числам (см. (9)-(19)). Это позволяет достаточно просто определить на образующих y - числах функции, представимые в виде степенного ряда. При этом не требуется введение понятия сходимости в множестве обобщенных y - чисел. Определим, например, по инверсному умножению экспоненциальную функцию $e_*^{\alpha y}$. Здесь, как и ранее при определении целых степеней y - чисел (см. (9)-(19)) чтобы подчеркнуть, что умножение понимается как инверсное, снизу приписываем значок $*$. Принимая в качестве определения экспоненциальной функции ее ряд Тейлора, получим:

$$e_*^{\alpha y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{\,n}\left[y\right]_*^n}{n!} = \left[y\right]_*^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{\,n}\left[y\right]_*^n}{n!} \ . \tag{29}$$

Представим сумму в (29) следующим образом:

$$\left[y\right]_*^0 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{\,3n+1}\left[y\right]_*^{3n+1}}{(3n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{\,3n+2}\left[y\right]_*^{3n+2}}{(3n+2)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{\,3n+3}\left[y\right]_*^{3n+3}}{(3n+3)!} \ . \tag{30}$$

Далее воспользуемся выражениями (13)-(16) для степеней y - чисел. В результате получим:

$$e_*^{\alpha y} = y\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{\,3n+1}}{(3n+1)!} + \breve{y}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{\,3n+2}}{(3n+2)!} + \breve{y} * y\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{\,3n}}{(3n)!} \ . \tag{31}$$

Выражение для последней суммы в (31) хорошо известно [4]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{\,3n}}{(3n)!} = \frac{1}{3}\left[e^{\alpha} + 2e^{-\alpha/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right)\right] \ . \tag{32}$$

Отсюда интегрированием по α в пределах от 0 до α легко получить выражения для остающихся сумм в (31):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{\,3n+1}}{(3n+1)!} = \frac{1}{3}\left[e^{\alpha} - 2e^{-\alpha/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\right] \ , \tag{33}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{3n+2}}{(3n+2)!}=\frac{1}{3}\left[e^{\alpha}-2e^{-\alpha/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\right]\ . \tag{34}$$

Таким образом, в результате получаем:

$$e_{*}^{\alpha y}=a(\alpha)y+b(\alpha)y+c(\alpha)y*y \tag{35}$$

где

$$a(\alpha)=\frac{1}{3}\left[e^{\alpha}-2e^{-\alpha/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\right] \tag{36}$$

$$b(\alpha)=\frac{1}{3}\left[e^{\alpha}-2e^{-\alpha/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\right] \tag{37}$$

$$c(\alpha)=\frac{1}{3}\left[e^{\alpha}+2e^{-\alpha/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right)\right] \tag{38}$$

Аналогично определяется $e_{*}^{\alpha y}$:

$$e_{*}^{\alpha y}=a(\alpha)y+b(\alpha)y+c(\alpha)y*y \tag{39}$$

где $a(\alpha)$, $b(\alpha)$, $c(\alpha)$ определены (36)-(38).

Рассмотрим теперь другой пример:

$$\ln(1+z)=z-\frac{1}{2}z^{2}+\frac{1}{3}z^{3}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}z^{n}}{n} \tag{40}$$

Подставим формально вместо z y - число αy. В результате получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\alpha^{n}[y]_{*}^{n}}{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{3n+1}\alpha^{3n}[y]_{*}^{3n}}{3n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{(3n+1)+1}\alpha^{3n+1}[y]_{*}^{3n+1}}{3n+1}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{(3n+2)+1}\alpha^{3n+2}[y]_{*}^{3n+2}}{3n+2} \tag{41}$$

Далее воспользовавшись формулами (13)-(15) для степеней y - чисел, найдем:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\alpha^{n}[y]_{*}^{n}}{n}=a(\alpha)y+b(\alpha)\breve{y}+c(\alpha)\breve{y}*y\ , \tag{42}$$

где

$$a(\alpha) = -\frac{1}{6}\ln(\alpha^2 - \alpha + 1) + \frac{1}{3}\ln(1+\alpha) - \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{\sqrt{3}\alpha}{\alpha - 2} \tag{43}$$

$$b(\alpha) = -\frac{1}{6}\ln(1+\alpha^3) + \frac{1}{3}\ln(1+\alpha) + \frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{\sqrt{3}\alpha}{\alpha - 2} \tag{44}$$

$$c(\alpha) = \frac{1}{3}\ln(1+\alpha^3) \tag{45}$$

при $-1 < \alpha \leq 1$.

Рассмотрим теперь полиномиальные функции от y - чисел. Среди таких функций наиболее простой и в то же время важной для многих приложений является бином Ньютона. Поэтому рассмотрим функцию

$$(1+z)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k \; . \tag{46}$$

Подставляя в правую часть (46) вместо z y - число, получим

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[y]_*^k = \sum_{k=0}^{[n/3]}\binom{n}{3k}[y]_*^{3k} + \sum_{k=0}^{3k+1\leq n}\binom{n}{3k+1}[y]_*^{3k+1} + \sum_{k=0}^{3k+2\leq n}\binom{n}{3k+2}[y]_*^{3k+2} \; . \tag{47}$$

Подставляя сюда явные выражения (13)-(15) для степеней y - чисел, получим:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}[y]_*^k = ay + b\breve{y} + c\breve{y} * y \; , \tag{48}$$

где значения a, b, c, выражаются через значения соответствующих сумм:

$$c = \sum_{k=0}^{[n/3]}\binom{n}{3k} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)\right) \tag{49}$$

$$a = \sum_{k=0}^{3k+1\leq n}\binom{n}{3k+1} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\left(\frac{\pi(n-2)}{3}\right)\right) \tag{50}$$

$$b = \sum_{k=0}^{3k+2\leq n}\binom{n}{3k+2} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\left(\frac{\pi(n+2)}{3}\right)\right) \tag{51}$$

Завершая этот раздел, обратим внимание на следующее обстоятельство. В выражениях (40) и (46) мы подставляли y - число не в левую часть выражения, а в ряд (сумму), который мы принимали в качестве определения функции. При этом в соответствии с формулами (13)-(15) для степеней y - чисел ряды y - чисел сводились просто к числовым рядам и нам не требовалось вводить понятия сходимости во множестве обобщенных y - чисел. Совершенно иная ситуация возникает в том случае, если мы попытаемся рассматривать функции (29), (40) не от y - числа αy, а, например, от y - числа $y * y$. В этом случае старшие степени не сводятся к младшим, и чтобы придать смысл рядам можно ввести понятие нормы и рассматривать сходимость по норме.

Естественно при этом сходящийся по одной норме ряд может не быть сходящимся по другой норме.

5. СООТНОШЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ И РАЗБИЕНИЕ НА КЛАССЫ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В МНОЖЕСТВЕ ИСХОДНЫХ y-ЧИСЕЛ

Введем на множестве исходных y- чисел соотношение эквивалентности следующим образом: назовем эквивалентными элементы, начинающиеся с одинаковых образующих y - чисел (то есть либо с y, либо с y) и заканчивающиеся одинаковыми y- числами. Очевидно, что соотношение эквивалентности введено корректно, то есть при таком определении оказываются выполненными аксиомы рефлексивности, симметричности и транзитивности. Таким образом, оказываются эквивалентными, например, y- числа y, $y* y* y$, $y* y* y* y* y$, и т.д. В результате все множество исходных y- чисел разбивается на четыре класса эквивалентности. Будем использовать для этих классов следующее обозначение: $U(y,y)$, $U(y,y)$, $U(y,y)$, $U(y,y)$. В этих обозначениях в круглых скобках на первом месте стоит образующее y- число, с которого начинаются исходные y- числа данного подмножества, а на втором месте y- число, которым они заканчиваются:

$$U(y,y) = \{y, y* y* y, y* y* y* y* y, \dots\} , \tag{52}$$

$$U(y,y) = \{y, y* y* y, y* y* y* y* y, \dots\} , \tag{53}$$

$$U(y,y) = \{y* y, y* y* y* y, y* y* y* y* y* y, \dots\} , \tag{54}$$

$$U(y,y) = \{y* y, y* y* y* y, y* y* y* y* y* y, \dots\} , \tag{55}$$

С использованием множеств $U(y,y)$, $U(y,y)$, $U(y,y)$, $U(y,y)$ будет удобно определить некоторую алгебру. Определим понятие умножения двух множеств: под произведением $A* B$ двух множеств A и B будем подразумевать множество составленное из всевозможных произведений вида $a* b$, где $a\in A$, $b\in B$. Нетрудно получить следующую таблицу умножения:

$$U(y,y)*\{y\} = \{y\} . \tag{56}$$

Здесь и далее $\{y\}$, либо $\{y\}$ означает множество, состоящее из одного элемента - y либо y, соответственно.

$$U(y,y)*\{y\} = \{y\} , \tag{57}$$

$$U(y,y)*\{y\} = \{y\} , \tag{58}$$

$$U(y,y)*\{y\} = \{y\} , \tag{59}$$

$$\{y\}* U(y,y) = \{y\} , \tag{60}$$

$$\{y\} * U(y,y) = \{y\} \ , \tag{61}$$

$$\{y\} * U(y,y) = \{y\} \ , \tag{62}$$

$$\{y\} * U(y,y) = \{y\} \ . \tag{63}$$

$$U(y,y) * \{y\} = U(y,y) \setminus y \ . \tag{64}$$

В этой формуле и в последующих формулах этого раздела $U \setminus y$ означает множество U без элемента y.

$$U(y,y) * \{y\} = U(y,y) \setminus y \ , \tag{65}$$

$$U(y,y) * \{y\} = U(y,y) \ , \tag{66}$$

$$U(y,y) * \{y\} = U(y,y) \ , \tag{67}$$

$$\{y\} * U(y,y) = U(y,y) \setminus y \ , \tag{68}$$

$$\{y\} * U(y,y) = U(y,y) \setminus y \ , \tag{69}$$

$$\{y\} * U(y,y) = U(y,y) \ , \tag{70}$$

$$\{y\} * U(y,y) = U(y,y) \ . \tag{71}$$

Эта таблица умножения позволяет решать простейшие уравнения в y- числах. Кроме того, с помощью соотношений (56)-(71) можно перейти к алгебре множеств, причем образующими элементами такой алгебры будут множества $U(y,y)$, $U(y,y)$, $U(y,y)$, $U(y,y)$. Приведем таблицу умножения (которая будет содержать 16 соотношений, в соответствии с тем, что для каждого U есть четыре сомножителя, включая его самого) для образующих множеств указанной алгебры:

$$U(y,y) * U(y,y) = \{y\} \ , \tag{72}$$

$$U(y,y) * U(y,y) = U(y,y) \ , \tag{73}$$

$$U(y,y) * U(y,y) = \{y\} \ , \tag{74}$$

$$U(y,y) * U(y,y) = U(y,y) \setminus y \ , \tag{75}$$

$$U(y,y) * U(y,y) = \{y\} \ , \tag{76}$$

$$U(y,y) * U(y,y) = U(y,y) \ , \tag{77}$$

$$U(y,y) * U(y,y) = U(y,y) \setminus y \ , \tag{78}$$

$$U(y,y) * U(y,y) = \{y\} \ , \tag{79}$$

$$U(y,y) * U(y,y) = U(y,y) \ , \tag{80}$$

$$U(y,y) * U(y,y) = U(y,y) \setminus y \ , \tag{81}$$

$$U(y,y) * U(y,y) = U(y,y) \ , \tag{82}$$

$$U(y,y) * U(y,y) = U(y,y) \setminus y * y \ , \tag{83}$$

$$U(y,y) * U(y,y) = U(y,y) \setminus y \ , \tag{84}$$

$$U(y,y) * U(y,y) = U(y,y) \ , \tag{85}$$

$$U(y,y) * U(y,y) = U(y,y) \setminus y * y \ , \tag{86}$$

$$U(y,y) * U(y,y) = U(y,y) \ . \tag{87}$$

Следует заметить, что полученная алгебра оказывается, как и алгебра y- чисел, неассоциативной. В этом нетрудно убедиться, рассмотрев следующий пример:

$$(U(y,y) * U(y,y)) * U(y,y) = y * U(y,y) = U(y,y) \ , \tag{88}$$

$$U(y,y) * (U(y,y) * U(y,y)) = U(y,y) * y = U(y,y) \ . \tag{89}$$

6. ВОЗВЕДЕНИЕ ИСХОДНЫХ у-ЧИСЕЛ В СТЕПЕНЬ. ТАБЛИЦА УМНОЖЕНИЯ ИСХОДНЫХ у-ЧИСЕЛ

Выше были подробно рассмотрены вопросы инверсного умножения у-чисел, а также возведения в целую степень образующих у-чисел и, соответственно, определение некоторых функций от образующих у-чисел. Ниже мы рассмотрим возведение в степень исходных у-чисел, а также составим таблицу умножения исходных у-чисел, которая позволит значительно упростить процедуру их инверсного умножения.

Прежде всего, строго определим понятие степени исходного у-числа относительно операции инверсного умножения:

$$[Y_m]_*^n \equiv (...((Y_m * Y_m) * Y_m) * ....Y_m) \ . \tag{90}$$

Расставленные в (90) скобки определяют последовательность выполнения операций умножения. Такое определение степени эквивалентно следующему рекуррентному соотношению

$$[Y_m]_*^{n+1} = [Y_m]_*^n * Y_m \ . \tag{91}$$

Это соотношение удобно для нахождения общих формул возведения в степень, поскольку позволяет пользоваться математической индукцией. Для дальнейшего нам понадобятся следующие соотношения, которые легко проверяются непосредственно:

$$Y_1 * Y_{2m} = Y_1 \ , \tag{92}$$
$$\overline{Y}_1 * \overline{Y}_{2m} = \overline{Y}_1 \ , \tag{93}$$
$$Y_{2m} * \overline{Y}_1 = \overline{Y}_1 \ , \tag{94}$$
$$\overline{Y}_{2m} * Y_1 = Y_1 \ , \tag{95}$$

где $m = 1, 2, 3, \ldots$.

Аналогично для исходных у-чисел нечетных порядков:

$$Y_1 * Y_{2m+1} = \overline{Y}_1 \ , \tag{96}$$
$$\overline{Y}_1 * \overline{Y}_{2m+1} = Y_1 \ , \tag{97}$$
$$Y_{2m+1} * Y_1 = \overline{Y}_1 \ , \tag{98}$$
$$\overline{Y}_{2m+1} * \overline{Y}_1 = Y_1 \ , \tag{99}$$

Соотношения (92)-(99) оказываются удобны для получения общих формул возведения в степень исходных у-чисел Y_n , $\overline{Y}_n$ нечетных порядков $n = 2m + 1$. С использованием (91) и математической индукции нетрудно получить следующие соотношения:

$$\left[Y_{2m+1}\right]_*^{3n-1} = \overline{Y}_1 \ , \tag{100}$$
$$\left[Y_{2m+1}\right]_*^{3n} = \overline{Y}_{2(m+1)} \ , \tag{101}$$
$$\left[Y_{2m+1}\right]_*^{3n+1} = Y_{2m+1} \ , \tag{102}$$

$$\left[\overline{Y}_{2m+1}\right]_*^{3n-1} = Y_1 \ , \tag{103}$$
$$\left[\overline{Y}_{2m+1}\right]_*^{3n} = Y_{2(m+1)} \ , \tag{104}$$
$$\left[\overline{Y}_{2m+1}\right]_*^{3n+1} = \overline{Y}_{2m+1} \ , \tag{105}$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$. Что касается возведения в степень исходных у-чисел четного порядка, то, очевидно, такая операция сводится просто к умножению порядка исходного у-числа на показатель степени:

$$\left[Y_{2m}\right]_*^{n} = Y_{2mn} \ , \tag{106}$$
$$\left[\overline{Y}_{2m}\right]_*^{n} = \overline{Y}_{2mn} \ , \tag{107}$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Соотношения (92)-(99) позволяют записать следующую таблицу умножения:

Таблица 1

	Y_{2n}	Y_{2n+1}	$\overline{Y}_{2n}$	$\overline{Y}_{2n+1}$
Y_{2m}	$Y_{2(m+n)}$	$Y_{2(m+n)+1}$	$\overline{Y}_{2n}$	$\overline{Y}_{2n+1}$
Y_{2m+1}	Y_1	$\overline{Y}_1$	$Y_{2(m+n)+1}$	$Y_{2(m+n+1)}$
$\overline{Y}_{2m}$	Y_{2n}	Y_{2n+1}	$\overline{Y}_{2(m+n)}$	$\overline{Y}_{2(m+n)+1}$

$\overline{Y}_{2m+1}$	$\overline{Y}_{2(m+n)+1}$	$\overline{Y}_{2(m+n+1)}$	$\overline{Y}_1$	Y_1

В этой таблице на пересечении строк и столбцов стоит число, являющееся результатом умножения исходного y-числа из первого столбца и верхней строки, т.е. если, например, мы хотим найти результат умножения y-числа $\overline{Y}_{2m}$ (1-й столбец, 4-я строка) и Y_{2n+1} (верхняя строка, 3-й столбец), то результат мы находим на пересечении 4-й строки и 3-го столбца: $\overline{Y}_{2m} * Y_{2n+1} = Y_{2n+1}$. Аналогичная таблица для исходных y-чисел до 11 порядка включительно была приведена в [2].

7. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЕЙ ИЗ ИСХОДНЫХ y-ЧИСЕЛ

Извлечение корней определим как операцию обратную возведению в степень. Из формул (100)-(107) следует, что при возведении в одну и ту же степень разных исходных y-чисел в некоторых случаях получаем один и тот же результат. Таким образом, операция извлечения корней неоднозначна. Поэтому, под операцией извлечения корня степени m из исходного y-числа Y_n будем понимать отображение, ставящее в соответствие исходному y-числу множество $\{Y_k\}$ всех исходных y-чисел, таких, которые при возведении в степень m дают число Y_n:

$$[Y_k]_*^m = Y_n \ . \tag{108}$$

Из формул (100)-(107) следует, что не для всех исходных y-чисел возможна операция извлечения корня, например, не существует исходного y-числа, которое бы при возведении в степень $3n$ давало Y_1. Таким образом, иногда рассматриваемое множество может быть пустым:

$$[Y_1]_*^{\frac{1}{3n}} = \varnothing \ . \tag{109}$$

Рассмотрим теперь более подробно формулы извлечения корней. Прежде всего, рассмотрим наиболее простой случай. Возведение в степень $3n+1$ исходных y-чисел нечетного порядка Y_{2m+1} и $\overline{Y}_{2m+1}$ дает то же самое число (102), (105). Таким образом, определим

$$[Y_{2m+1}]_*^{\frac{1}{3n+1}} = \{Y_{2m+1}\} \ , \tag{110}$$

$$[\overline{Y}_{2m+1}]_*^{\frac{1}{3n+1}} = \{\overline{Y}_{2m+1}\} \ . \tag{111}$$

Аналогично определим $[Y_1]_*^{\frac{1}{3n-1}}$ и $[\overline{Y}_1]_*^{\frac{1}{3n-1}}$:

$$[Y_1]_*^{\frac{1}{3n-1}} = \{\overline{Y}_{2m+1}\}_{m=0}^{\infty} \ , \tag{112}$$

$$\left[\overline{Y}_1\right]_*^{\frac{1}{3n-1}} = \left\{Y_{2m+1}\right\}_{m=0}^{\infty} . \tag{113}$$

Обратим внимание, что в формулах (112) и (113) множество состоит из бесконечного числа элементов. Это обстоятельство, в отличие от формул (110) и (111), помечено индексами m=0 и ∞.
Извлечение корней из четных чисел несколько сложнее. Дело в том, что возведение в степень $3n$ исходного у-числа $\overline{Y}_{6mn-1}$ и возведение в ту же степень числа Y_{2m} дает один и тот же результат Y_{6mn}. Таким образом, операция, обратная возведению в степень в формулах (104) и (106), а так же в формулах (101) и (107) не всегда однозначна. Из формул (104), (106) следует, что она будет однозначна и будет описываться формулами

$$\left[Y_{2(m+1)}\right]_*^{\frac{1}{3n}} = \left\{\overline{Y}_{2m+1}\right\} , \tag{114}$$

$$\left[Y_{2Mn}\right]_*^{\frac{1}{n}} = \left\{Y_{2M}\right\} , \tag{115}$$

за исключением случая $m+1 = 3Mn$:

$$\left[Y_{6Mn}\right]_*^{\frac{1}{3n}} = \left\{\overline{Y}_{6Mn-1}, Y_{2M}\right\} . \tag{116}$$

Соответствующие формулы для у-чисел $\overline{Y}_m$ имеют вид:

$$\left[\overline{Y}_{2(m+1)}\right]_*^{\frac{1}{3n}} = \left\{Y_{2m+1}\right\} , \tag{117}$$

$$\left[\overline{Y}_{2Mn}\right]_*^{\frac{1}{n}} = \left\{\overline{Y}_{2M}\right\} , \tag{118}$$

за исключением случая $m+1 = 3Mn$:

$$\left[\overline{Y}_{6Mn}\right]_*^{\frac{1}{3n}} = \left\{Y_{6Mn-1}, \overline{Y}_{2M}\right\} . \tag{119}$$

Формулы (110)-(119) решают проблему извлечения корней из исходных у-чисел. Извлечение корней других степеней приводят к пустому множеству (см. (109)).

Теперь, определив понятие корня из у-числа можно обобщить понятие степени исходного у-числа, распространив его на рациональные значения показателей, т.е. определить величину $\left[Y_m\right]_*^{\frac{k}{n}}$. Эту величину можно определить либо как $\left[\left[Y_m\right]_*^{\frac{1}{n}}\right]_*^{k}$, либо как $\left[\left[Y_m\right]_*^{k}\right]_*^{\frac{1}{n}}$. Заметим, что эти два способа не одинаковы, что связано со свойствами некоммутативности и неассоциативности умножения у-чисел.

8. ОПЕРАЦИЯ ДЕЛЕНИЯ ИСХОДНЫХ у-ЧИСЕЛ

Рассмотренное в разделе 6 умножение исходных у-чисел допускает обратную операцию – деление. При этом в силу некоммутативности умножения потребуется отдельно определить понятие левого и правого частного от деления. Более того рассматриваемая операция деления, будучи определена как операция обратная умножению, оказывается неоднозначной. С такой трудностью мы уже сталкивались в разделе 7 при определении операции извлечения корней из у-чисел. В рассматриваемом случае мы поступим аналогично, рассматривая операцию деления как отображение, ставящее в соответствие двум у-числам (делимому и делителю) некоторое множество у-чисел, которое в дальнейшем будем называть частным от деления.

Рассмотрим решение простейшего уравнения

$$\Lambda * Y_n = Y_m . \tag{120}$$

В этом уравнении Y_m и Y_n заданы, требуется найти все исходные у-числа Λ, удовлетворяющие этому уравнению. Множество всех исходных у-чисел Λ, удовлетворяющих уравнению (120), будем называть правым частным от деления Y_m на Y_n и обозначать Y_m / Y_n. Аналогично определим левое частное $Y_m \setminus Y_n$ как множество всех решений уравнения

$$Y_m * \Lambda = Y_n . \tag{121}$$

Таблица умножения исходных у-чисел, приведенная в разделе 6 охватывает все возможные случаи умножения исходных чисел любых порядков и потому позволяет решить задачу нахождения частного любых исходных у-чисел. Рассмотрим сначала нахождение правых частных. При этом удобно отдельно рассмотреть случаи четных и нечетных m и n в уравнении (120). Результаты приведем в виде следующей таблицы:

Таблица 2

	Делитель			
	Y_{2N}	Y_{2N+1}	$\bar{Y}_{2N}$	$\bar{Y}_{2N+1}$
Y_{2M}	$Y_{2(M-N)}$ $(M > N)$ $\{\bar{Y}_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ $(M = N)$	$\varnothing$	$\varnothing$	$Y_{2(M-N)-1}$ $(M > N)$
Y_{2M+1}	$\{Y_{2m+1}\}_{m=0}^{\infty}$ $(M = 0)$	$Y_{2(M-N)}$ $(M > N)$ $\{\bar{Y}_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ $(M = N)$	$Y_{2(M-N)+1}$ $(M \geq N)$	$\{\bar{Y}_{2m+1}\}_{m=0}^{\infty}$ $(M = 0)$
$\bar{Y}_{2M}$	$\varnothing$	$\bar{Y}_{2(M-N)-1}$ $(M > N)$	$\bar{Y}_{2(M-N)}$ $(M > N)$ $\{Y_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ $(M = N)$	$\varnothing$
$\bar{Y}_{2M+1}$	$\bar{Y}_{2(M-N)+1}$ $(M \geq N)$	$\{Y_{2m+1}\}_{m=0}^{\infty}$ $(M = 0)$	$\{\bar{Y}_{2m+1}\}_{m=0}^{\infty}$ $(M = 0)$	$\bar{Y}_{2(M-N)}$ $(M > N)$ $\{Y_{2m}\}_{m=1}^{\infty}$ $(M = N)$

На пересечении строк и столбцов этой таблицы расположены правые частные от деления у-числа, находящегося в самом левом столбце (нумерующего строку) на у-число находящееся в верхней строке (нумерующее столбец). Рядом с соответствующим частным приведено условие когда оно существует (условие разрешимости уравнения (120)). Приведем пример: найдем частное от деления Y_{2M+1} (1-й столбец, 3-я строка) на $\bar{Y}_{2N}$ (верхняя строка, 4-й столбец). На пересечении 3-й строки и 4-го столбца получаем результат

$$Y_{2M+1} / \bar{Y}_{2N} = Y_{2(M-N)+1}, \quad (M \geq N). \tag{122}$$

В тех случаях когда частное не существует (уравнение (120) не разрешимо) в таблице помещен знак пустого множества. Аналогичная таблица получается для левых частных $Y_M \setminus Y_N$:

Таблица 3

	делимое			
	Y_{2N}	Y_{2N+1}	$\bar{Y}_{2N}$	$\bar{Y}_{2N+1}$
Y_{2M}	$Y_{2(N-M)}$ $(N > M)$	$Y_{2(N-M)+1}$ $(N \geq M)$	$\bar{Y}_{2N}$	$\bar{Y}_{2N+1}$
Y_{2M+1}	$\bar{Y}_{2(N-M)-1}$ $(N > M)$	$\bar{Y}_{2(N-M)}$ $(N > M)$ $\{Y_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ $(N = 0)$	$\varnothing$	$\{Y_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ $(N = 0)$
$\bar{Y}_{2M}$	Y_{2N}	Y_{2N+1}	$\bar{Y}_{2(N-M)}$ $(N > M)$	$\bar{Y}_{2(N-M)+1}$ $(N \geq M)$
$\bar{Y}_{2M+1}$	$\varnothing$	$\{\bar{Y}_{2n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ $(N = 0)$	$Y_{2(N-M)-1}$ $(N > M)$	$Y_{2(N-M)}$ $(N > M)$ $\{\bar{Y}_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ $(N = 0)$

В этой таблице на пересечении строк и столбцов приведены левые частные. Например, найдем левое частное от деления Y_{2N+1} на $\bar{Y}_{2M}$, то есть $\bar{Y}_{2M} \setminus Y_{2N+1}$. На пересечении 4-й строки и 3-го столбца получаем результат

$$\bar{Y}_{2M} \setminus Y_{2N+1} = Y_{2N+1} . \tag{123}$$

9. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ДЕЛИМОСТИ

В предыдущей главе была рассмотрена операция деления исходных у-чисел, при этом были определены понятия правого и левого частных как множества исходных у-чисел, удовлетворяющих либо уравнению (120) – для правого частного, либо уравнению (121), соответственно, для левого частного. При этом мы не выходили из множества исходных у-чисел. Существует, однако, далеко идущий подход, позволяющий расширить круг объектов, с которыми мы имели дело в предыдущих разделах и подойти к классу отображений в множестве у-чисел, который непосредственно связан с делимостью и разрешимостью простейших уравнений в у-числах.

Рассмотрим еще раз уравнение (121), которое перепишем в следующем виде

$$a * \Lambda = b . \tag{124}$$

В этом уравнении у-числа a и b фиксированы и требуется найти множество всех таких у-чисел Λ , которые удовлетворяют (124). Однако, уравнение (124) можно рассматривать как отображение, переводящее число a в b, при этом такое отображение определено на всем множестве у-чисел, линейно и вполне задается одним числом Λ . Такая постановка вопроса определяет на множестве у-чисел некоторый класс линейных операторов. При этом сразу следует заметить, что поскольку уравнение (124) не всегда разрешимо (см. табл.3 предыдущего раздела), а соответствующее линейное отображение $a \to b$ существует, то множество всех линейных отображений во множестве у-чисел не изоморфно самому множеству у-чисел. Это позволяет, опираясь на уравнение (124) попытаться описать возможное расширение множества у-чисел, как множество объектов, задающих отображение $a \to b$. Чтобы показать возможность реализации такого подхода рассмотрим следующий пример: $b = Y_n$, $n \geq 2$. Решения такого уравнения в у-числах можно найти в таблице 3, что уже определяет класс линейных отображений, задаваемых с помощью у-чисел. Однако можно представить правую часть уравнения для рассматриваемого случая следующим образом:

$$b = Y_n = Y_1 * \overline{Y}_{n-1}. \qquad (125)$$

Теперь рассмотрим вспомогательное уравнение

$$a * Z = Y_1. \qquad (126)$$

Если бы умножение у-чисел обладало свойством ассоциативности, то найдя множество решений уравнения (126) можно было построить, по крайней мере часть решений уравнения (124) домножив, в соответствии с (125), каждое из решений уравнения (126) на $\overline{Y}_{n-1}$ справа. Однако, в общем случае, из-за неассоциативности такое домножение не позволяет получить решения (124) в у-числах. Действительно, в выражении

$$a * Z * \overline{Y}_{n-1} \qquad (127)$$

сначала производится умножение $a * Z$, а уже затем выполняется следующее умножение на $\overline{Y}_{n-1}$, вследствие чего нельзя обособить последние два множителя (в общем случае). Тем не менее, можно поставить вопрос о нахождении таких пар чисел Z_1 и Z_2 (в данном случае $Z_2 = \overline{Y}_{n-1}$), которые удовлетворяют уравнению

$$a * Z_1 * Z_2 = b. \qquad (128)$$

Такие обобщенные решения уравнения (124) будем обозначать $(Z_1 \bullet Z_2)$:

$$a * (Z_1 \bullet Z_2) = b \qquad (129)$$

и рассматривать как линейные отображения множества у-чисел в себя, задаваемое соотношением (128). Другая точка зрения на обобщенные решения уравнения (124) может базироваться непосредственно на уравнении (128). С этой точки зрения обобщенные решения уравнения (124) имеют смысл решений уравнения (129), содержащего два неизвестных.

Далее рассмотрим, например, случай $a = Y_{2M+1}$. Тогда вспомогательное уравнение (126) примет вид

$$Y_{2M+1} * Z = Y_1. \qquad (130)$$

Его решения нетрудно определить с помощью таблицы 3. Из нее находим:

$$a \setminus Y_1 = Y_{2M+1} \setminus Y_1 = \{Y_{2m}\}_{m=1}^{\infty}. \qquad (131)$$

Отсюда находим одно из множеств обобщенных решений

$$\{(Y_{2m} \bullet \overline{Y}_{n-1})\}_{m=1}^{\infty} . \qquad (132)$$

Заметим, что множеством (132) исчерпываются далеко не все обобщенные решения уравнения (124) в рассматриваемом частном случае. Это связано с неоднозначностью представления правой части уравнения (124) в виде произведения у-чисел.

В ряде случаев может оказаться, что обобщенные решения определенного вида не существуют. Рассмотрим, например, случай $a = \overline{Y}_{2M}$, $b = \overline{Y}_N$. В этом случае попытка построить обобщенное решение вида $(z \bullet Y_{N-1})$, то есть с использованием вспомогательного уравнения вида (126), потерпит неудачу. Действительно вспомогательное уравнение в рассматриваемом случае неразрешимо, что влечет за собой отсутствие обобщенных решений вида $(z \bullet Y_{N-1})$. Это, однако, не исключает возможности построения обобщенных решений другого вида с использованием других вспомогательных уравнений. Ниже приведена таблица, содержащая обобщенные решения уравнения (124) с использованием вспомогательного уравнения вида (126).

Таблица 4.

	$b = Y_N$ вспом.ур-е $a * Z = Y_1$	$b = \overline{Y}_N$ вспом.ур-е $a * Z = \overline{Y}_1$
$a = Y_{2M}$	$\varnothing$	$(\overline{Y}_1 \bullet Y_{N-1})$
$a = Y_{2M+1}$	$\{(Y_{2m} \bullet \overline{Y}_{N-1})\}_{m=1}^{\infty}$	$\{(Y_{2m+1} \bullet Y_{N-1})\}_{m=0}^{\infty}$
$a = \overline{Y}_{2M}$	$(Y_1 \bullet \overline{Y}_{N-1})$	$\varnothing$
$a = \overline{Y}_{2M+1}$	$\{(\overline{Y}_{2m+1} \bullet \overline{Y}_{N-1})\}_{m=0}^{\infty}$	$\{(\overline{Y}_{2m} \bullet Y_{N-1})\}_{m=1}^{\infty}$

Подобным же образом можно находить обобщенные решения уравнения вида

$$\Lambda * a = b . \qquad (133)$$

При этом, представив правую часть уравнения (133) в виде произведения двух у-чисел для решения вспомогательного уравнения потребуется воспользоваться таблицей 2. При этом, чтобы отличать обобщенные решения уравнения (133) от обобщенных решений уравнения (124) будем использовать обозначение $(Z_1 \circ Z_2)$. Здесь, как и выше, под обобщенным решением мы будем понимать упорядоченную совокупность двух чисел Z_1 и Z_2 , удовлетворяющих соотношению

$$(Z_1 \circ Z_2) * a \equiv Z_1 * (Z_2 * a) = b . \qquad (134)$$

Обратим еще раз внимание на порядок умножений, обозначенный в (134) обособлением у-чисел Z_2 и a в круглые скобки – сначала выполняется инверсное умножение у-чисел Z_2 и a , а затем полученный результат умножается слева на Z_1. Не останавливаясь на деталях вычислений приведем в виде таблицы соответствующие результаты

Таблица 5.

	$a = Y_{2N}$	$a = Y_{2N+1}$	$a = \overline{Y}_{2N}$	$a = \overline{Y}_{2N+1}$

$b = Y_{2M}$ $Z * a = \overline{Y}_1$	$\varnothing$	$\left\{(Y_{2M-1} \circ Y_{2m+1})\right\}_{m=0}^{\infty}$	$\left\{(Y_{2M-1} \circ \overline{Y}_{2m+1})\right\}_{m=0}^{\infty}$	$\left\{(Y_{2M-1} \circ Y_{2m})\right\}_{m=1}^{\infty}$, $N = 0$; $\varnothing$, при $N > 0$
$b = Y_{2M+1}$ $Z * a = Y_1$	$\left\{(Y_{2M} \circ Y_{2m+1})\right\}_{m=0}^{\infty}$	$\left\{(Y_{2M} \circ \overline{Y}_{2m})\right\}_{m=1}^{\infty}$, $N = 0$; $\varnothing$, при $N > 0$	$\varnothing$	$\left\{(Y_{2M} \circ \overline{Y}_{2m+1})\right\}_{m=0}^{\infty}$
$b = \overline{Y}_{2M}$ $Z * a = Y_1$	$\left\{(\overline{Y}_{2M-1} \circ Y_{2m+1})\right\}_{m=0}^{\infty}$	$\left\{(\overline{Y}_{2M-1} \circ \overline{Y}_{2m})\right\}_{m=1}^{\infty}$, $N = 0$; $\varnothing$, при $N > 0$	$\varnothing$	$\left\{(\overline{Y}_{2M-1} \circ \overline{Y}_{2m+1})\right\}_{m=0}^{\infty}$
$b = \overline{Y}_{2M+1}$ $Z * a = \overline{Y}_1$	$\varnothing$	$\left\{(\overline{Y}_{2M} \circ Y_{2m+1})\right\}_{m=0}^{\infty}$	$\left\{(\overline{Y}_{2M} \circ \overline{Y}_{2m+1})\right\}_{m=0}^{\infty}$	$\left\{(\overline{Y}_{2M} \circ Y_{2m})\right\}_{m=1}^{\infty}$, $N = 0$; $\varnothing$, при $N > 0$

В таблице 5 в первой колонке вместе со значением параметра b приведено вспомогательное уравнение, использованное для построения обобщенного решения.

Ранее в работе [2] уже были предложены некоторые обобщенные решения уравнений (124), (133) и в частных случаях составлены соответствующие таблицы. Представленные в этой работе таблицы обобщают полученные ранее результаты. Отметим, что рассмотренные примеры позволяют в любом конкретном случае получить обобщенные решения по изложенной в этом разделе методике с использованием таблиц 2 и 3.

10. Заключение

В работе подробно рассмотрены основные алгебраические операции, вопросы делимости, возведения в степень, в том числе извлечения корней в множестве у-чисел. Наличие свойства неассоциативности умножения у-чисел, создаёт некоторую специфику, однако допускает непротиворечивым образом определить делимость у-чисел и извлечение корней. Установлено, что операция деления не всегда является однозначной и в ряде случаев невозможна. Свойство сведения старших степеней у-чисел к младшим позволило достаточно просто определить на множестве у-чисел функции представимые в виде степенных рядов. В частности были рассмотрены экспоненциальная, логарифмическая и биномиальная функции, показано, что эти функции представимы линейной комбинацией трёх самых простых у-чисел. Теория у-чисел ещё далека от завершения, а сами у-числа содержат много неожиданных свойств, не имеющих прямых аналогов в известных на сегодняшний день алгебраических системах.

Список литературы

1. Ёлкин С.В., Алгебраический подход к концепции информонного поля // Куликов В.В., Гаврилов Д.А., Ёлкин С.В., Универсальный искусственный язык- “hООМ-Диал”. М. : Гэлэкси Нэйшн, 1994. С. 73-94.

2. Ёлкин С.В. Ёлкин С.С. Информационное исчисление // Вестник ВИНИТИ НТИ. 2002. сер 2, N11. С17-24.

3. Ёлкин С.В. Открытый семантический язык SL // Вестник ВИНИТИ НТИ. 2003. сер 2, N4. С.5-15

4. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.:наука, 1981.